DE DESCENSU GRAVIUM. DE MOTU PENDULORUM IN CYCLOIDE. ET DE MOTU PROJECTILIUM.

AUCTORE

ROGERO COTES.

CANTABRIGIÆ,

Typis excudebant T. Fletcher & F. Hodson.

Impensis J. Nicholson, *Cantab*. Veneunt apud J. Rivington, *Lond*.

MDCCLXX.

A
LIST of the SUBSCRIBERS.

A

MR. Adams, of Caius College
Mr Allix, of Chrift's
Mr Amyas, of Caius, A. B.
Mr Atley, of St. John's

B

Mr Barftow, of Emmanuel
Mr Bateman, of ditto
Mr Batteley, of St. John's
Mr Bedford, of ditto
Mr Belgrave, of ditto, A. B.
Mr Befwicke, of ditto, A. B.
Mr Blackburn, of Sidney
Mr Blackburne, junior, of Peterhoufe
Mr Blakeway, of St. John's
Mr Bland, of Caius, A. B.
Mr Brand, of Chrift's
Mr Brandifh, of Caius College
Mr Bridges, of Queen's
Mr Bromley, of St. John's
Mr Bryer, of ditto
Mr Buck, of Caius
Mr Burflem, of St. John's, A. B.

C

Mr Champion, of Trinity Hall
Mr Chapman, of Jefus, A. B.
Mr Church, of Sidney
Mr Cleave, of Corpus Chrifti
Mr Clark, of Clare Hall
Mr Clarkfton, of Peterhoufe, A. B.
Mr Cockfhutt, of St. John's
Mr Cooper, of Queen's
Mr Cooper, of Pembroke Hall
Mr Crawford, of Queen's
Mr Crofts, of Caius

D

Mr Dampier, of King's College
Mr Dealtary, Fellow of Jesus
Mr Dewsnop, of ditto
Mr Dodwell, of Christ's
Mr Dove, of Clare Hall, A. B.
Mr Drewe, of Emmanuel
Mr Dymoke, of St. John's, A. B.

E

Mr Ellis, jun. of Trinity
Mr Emonson, of ditto
Mr Evans, jun. of St. John's
Mr Eyre, jun. of ditto

F

Mr Farnham, of St. John's
Mr Field, of Pembroke Hall
Mr Finch, of Trinity
Mr Fisher, Fellow of Caius
Mr Fisher, of Peterhouse, A. B.
Mr Fisher, of Christ's, A. B.
Mr Frank, of Trinity, A. B.

G

Mr Gregory, of Jesus
Mr Grimshaw, of Catherine Hall
Mr Grimwood, of St. John's

H

Mr Hadfield, of St. John's
Mr Halls, of ditto
Mr Hay, of Magdalen
Mr Healy, of Clare Hall
Mr Heath, of Magdalen College
Mr Hendry, of Corpus Christi
Mr Hill, of Catherine Hall, A. B.
Mr Hodgson, of Queen's, A. B.
Mr Hodgson, of Clare Hall, A. B.
Mr Holmes, of St. John's
Mr Holt, Fellow of Queen's
Mr Homer, of Emanuel
Mr Horton, of Queen's
Mr Hudson, Fellow of Queen's
Mr Hughes, of St. John's, A. B.
Mr Humphrey, of Corpus Christi
Mr Hunt, of Caius

J

Mr Jackson, of St. John's
Mr Jawett, of Trinity
Mr Jenkins, of Sidney
Mr Jobson, of Trinity
Mr Johnson, of Clare Hall, A. B.
Mr Jordan, of Queen's

K

Mr Kedington, of Caius

L

Mr Lane, of Queen's
Mr Laurence, of St. John's
Mr Law, of Peterhouse
Mr Layard, of St. John's, A. B.
Mr Layton, of ditto
Seym. Leeke, Esq; of Peterhouse
Mr Lloyd, of Caius, A. B.
Mr Lovat, of Clare Hall
Mr Lloyd, of Magdalen

M

Mr Maule, of Christ's College, A. B.
Mr Morrison, of Trinity
Mr Mountain, of Caius
Mr Murgatroyd, of St. John's

N

Mr Neal, of Caius
A. H. Newcome, Esq; Fellow of Queen's

O

Mr Outlaw, of Queen's, A. B.

P

Mr Pedley, of St. John's
Mr Pentycross, of Pembroke Hall
Mr Pern, of Peterhouse
Mr Pool, of Corpus Christi
Mr Porter, of Jesus
Mr Porter, of Trinity
Mr Prowd, of Jesus, A. B.
Mr Prytiman, of Pembroke Hall

R

Mr Radford, of St. John's, A. B.
Mr Rastal, of Peterhouse
Mr Rathbone, of Pembroke Hall, A. B.
Mr Ray, of Emmanuel
Mr Reid, of St. John's
Mr Robinson, senior, of Trinity, A. B.
Mr Robinson, junior, of Trinity
Mr Rolle, Fellow-Commoner of Emmanuel

S

Mr Rose, jun. of Trinity College
Mr Sandiford, of Corpus Christi
Mr Sandiford, of Sidney
Mr Scholes, of St. John's
Mr Smelt, of ditto
Mr Stephenson, of Clare Hall
Mr Sydenham, of Caius, A. B.

T

Mr Taylor, of Magdalen
Mr Taylor, of Pembroke Hall
Mr Topping, of Peterhouse
Mr Trant, of Christ's

V

Mr Vickers, of Trinity

W

Mr Wade, of St. John's
Mr Walker, of Clare Hall
Mr Ward, senior, of St. John's
Mr Ward, of Queen's
Mr Watts, of Caius
Mr Whitcher, of Pembroke Hall
Mr Wilcox, of Clare Hall
Mr Williams, jun. of St. John's
Mr Willis, of Trinity
Mr Wilmot, of Peterhouse
Mr Wilson, of Caius
Mr Wilson, of Clare Hall
Mr Wise, Fellow-Commoner of Trinity Hall
Mr Whish, of Trinity
Mr Withe, of Caius
Mr Woodburn, of Trinity
Mr Wrigley, of Catherine Hall

ERRATA.

Pag. 7. lin. 7. pro ſecondo, lege ſecundo.

Pag. 22. lin. 19. pro poſteriori *T K*, lege *T A*.

Pag. 23. lin. 10. pro Cy cloidis, lege Cycloidis.

Pag. 29. lin. 12. pro Theor. V. lege Theor. IV.

DE DESCENSU GRAVIUM.

LEMMA.

Vis acceleratrix, qua grave corpus per planum quodvis inclinatum oblique descendens urgetur, est ut Elevatio plani illius directe & Longitudo ejusdem inverse.

SIT enim *AC* Longitudo plani utcunque inclinati ad horizontale planum *BC*, sitque *AB* ejusdem plani inclinati Elevatio seu perpendicularis altitudo supra *BC*. Jam si uniformis & data vis Gravitatis qua corpus recta deorsum tendit, exponatur per *AB*, & hæc resolvatur in binas vires *AD* & *DB*, ducendo *BD* perpendicularem ad *AC*: patebit harum solam *AD* eam esse qua FIG. 1.

corpus oblique descendens acceleratur, alteram vero *D B* per contrariam plani renitentiam omnino tolli. Est autem *A D* ad *A B* ut *A B* ad *A C*: adeoque vis acceleratrix ad vim gravitatis absolutam erit ut *A B* ad *A C*. Igitur cum data sit vis gravitatis; erit vis acceleratrix directe ut *A B* Elevatio plani inclinati & inverse ut *A C* Longitudo ejusdem. *Q. E. D.*

PROBLEMA.

Motus rectilinei per æquales impulsus continuo propagati, in Medio non resistente, affectiones explicare.

IN Motu æquabili si detur Tempus, erit Longitudo spatii peracti ut Velocitas; si detur Velocitas, erit Longitudo ut Tempus: adeoque neutro dato, ut Velocitas & Tempus conjunctim. Commode ergo exponitur per Parallelogrammum rectangulum, cujus latera Velocitatem & Tempus rite retulerint: Nam & hujus quoque ratio è rationibus laterum suorum componitur.

Dividatur

Dividatur jam recta *A M* in partes qualescunque æquales *A B*, *B C*, &c. Temporis partes æquales referentes, in quarum initiis agat vis eadem quælibetcunque successive unico suo impulsu; faciatque ut mobile in primo tempore percurrat Spatium quale est *A E* rectangulum, huic æquale *C E* secundo tempore confecturum simulque (propter iteratum impulsum) huic aliud æquale *E F*; ita ut totum secundi temporis Spatium *B F* duplum sit primi *A E*, totum tertii temporis Spatium *C G* triplum primi *A E*, atque ita deinceps. Velocitates etiam in singulis temporibus eodem modo accrescent. Secunda *C F* dupla erit primæ *B E*, tertia *D G* tripla ejusdem, &c. Quod si Spatiorum in temporibus integris *A K*, *A M* decursorum exquiratur ratio, erunt hæc inter se ut areæ angulosæ *A K L*, *A M N*; ultimæque Velocitates ut rectæ *K L*, *M N*. FIG. 2.

Augeatur jam numerus & minuatur latitudo parallelogrammorum ad infinitum, ut ita actione continua vis impellentis progrediatur Mobile; & abibunt Figuræ angulosæ è parallelogrammulis suis FIG. 3.

ſuis conflatæ in Triangula *AKL*, *AMN*. Itaque Spatia deſcripta in Temporibus *AK*, *AM* à Mobili æquabiliter accelerato, ſunt ut Triangula *AKL*, *AMN*, & Velocitates in iſtis Temporibus ultimo acquiſitæ, ſunt ut rectæ *KL*, *MN*. *Q. E. E.*

Corol. Patet ſi Vires aliæ atque aliæ idem Mobile eodem modo impellant, Velocitates in Temporibus quibuſvis genitas, eſſe ut Vires generantes & Tempora in quibus generantur conjunctim.

THEOREMA I.

Longitudo peracta in dato Tempore a gravi e quiete caſum inchoante, per quodcunque planum datum, dimidia eſt ejus quam pari tempore tranſiret motu æquabili cum Velocitate quam acquiſivit ultimo caſus momento.

FIG. 3. VIS qua urgetur grave continuo impulſu ut per planum quodvis deſcendat eſt ubique ut Elevatio plani illius directe & Longitudo ejuſdem inverſe:

inverſe: hoc per Lemma præmiſſum conſtat. Itaque cum detur planum, dabitur Vis. Unde (per Solutionem Problematis præcedentis) ſi Tempus deſcenſus exponatur per rectam *A K* & Velocitas ultimo acquiſita per rectam *K L*, exponetur Longitudo confecta per triangulum *A K L*, dimidium ſcilicet parallelogrammi cujus latera ſunt *A K*, *K L*, per quod utique exponitur Longitudo quæ tempore eodem *A K* deſcribitur à mobili æquabiliter lato cum velocitate ultima *K L*. *Q. E. D.*

THEOREMA II.

In dato plano, ratio integra tum temporis a quiete, tum Velocitatis genitæ & ſubduplicata ratio Longitudinis deſcriptæ æquantur.

SUNTO Tempora *A K*, *A M;* Velocitates genitæ *K L*, *M N;* Longitudines percurſæ *A K L*, *A M N*, uti ſupra: & patet jam propoſitio ex Elementis. *Q. E. D.* FIG. 3.

THEOREMA III.

In planis quibuscunque ratio Longitudinum emensarum componitur ex rationibus Temporum & Velocitatum ultimarum; ratio Temporum ex rationibus Longitudinum directe & Velocitatum inverse; ratio Velocitatum ex rationibus Longitudinum directe & Temporum inverse.

FIG. 3. EXPONUNTUR, uti supra, Longitudines, Tempora & Velocitates per triangula eorumque latera bina circa datum angulum posita: constat itaque propositio ex Elementis. *Q. E. D.*

Corol. 1. Si detur Longitudo,* reciprocat ratio Temporis & Velocitatis; & vice versa.†

Corol.

* Sit L Longitudo percursa, T Tempus, & V Velocitas; tum (per Theorema III.) $L = T \times V$, adeoque $T = \frac{L}{V}$; Longitudine igitur datâ, id est, $L = 1$, $T = \frac{1}{V}$.

† Si Tempus sit reciproce ut Velocitas, dabitur Longitudo: quoniam enim $T = \frac{1}{V}$, $T \times V = 1$. Sed $T \times V = L$ (per Theorema III.): adeoqne $L = 1$, id est, dabitur.

Corol. 2. Si detur Tempus, erit Longitudo ut Velocitas; & vice verſa.

Corol. 3. Si detur Velocitas, erit Longitudo ut Tempus; & vice verſa.

THEOREMA IV.

In planis quibuſcunque Velocitates ultimo genitæ ſunt in ratione ſubduplicata Elevationum: Ratioque Temporum componitur ex ratione ſimplici Longitudinum directe & ex ratione ſubduplicata Elevationum inverſe.

PER Corollarium Problematis præcedentis, Velocitas ultimo genita eſt ut Vis eam generans & ut Tempus in quo generatur conjunctim, hoc eſt (per Lemma præmiſſum) in ratione compoſita Elevationis plani directe, Longitudinis ejuſdem inverſe, & Temporis directe. Erit itaque Velocitas (per Theorema III.) ut Elevatio plani directe utque ipſa Velocitas inverſe; atque adeo in ratione ſubduplicata Elevationis.‡ *Q. E. D.*

Tempus

‡ Vide not. p. 17. $v :: f \cdot t : \frac{E}{L} \cdot t = E \cdot V$

$= \frac{E \cdot V}{v} ::$

Tempus autem, cum ſit per Theorema III. ut Longitudo percurſa directe & Velocitas inverſe; rationem habebit compoſitam ex ratione ſimplici Longitudinis directe & ex ratione ſubduplicata Elevationis inverſe.§ *Q. E. D.*

Corol. 1. Si detur Longitudo percurſa; Tempus deſcenſus erit reciproce in ratione ſubduplicata Elevationis; & vice verſa.

Corol. 2. Si detur Elevatio; dabitur Velocitas, eritque Tempus directe ut Longitudo plani; & vice verſa.

Corol. 3. Si detur Tempus; Longitudo plani percurſi erit in ſubduplicata ratione Elevationis ejuſdem, & Velocitas erit ut Longitudo; & vice verſa.

FIG. 4. Inde in Circulo, ſi diameter quævis ad horizontem ſtatuatur normalis, erunt Tempora deſcenſus per Chordas quaſlibet ab extremitate hujus ductas

§ Vide not. p. 17.

ductas æqualia,* & Velocitates ultimæ erunt ut ipſæ Chordæ: ‡ ſunt enim Chordarum longitudines ad invicem in ſubduplicata ratione ſuarum elevationum.

THEOREMA V.

Si ex altitudine eadem deſcendat mobile continuato motu per quotlibet ac quælibet plana contigua, utcunque inclinata; ſemper eandem in fine velocitatem acquiret, quæ nimirum æqualis erit ei quam acquireret cadendo perpendiculariter ex pari altitudine.

Hugenii Demonſtratio.

SINT plana contigua *AB, BC, CD*; quorum terminus *A*, ſupra horizontalem lineam *DF* per infimum terminum *D* ductam, altitudinem habeat

* $T=\frac{L}{\sqrt{E}}$ (per Theorema IV.), ubi *E* ponitur pro Elevatione: ſi igitur deſcendat Corpus per *DA*, $T=\frac{DA}{\sqrt{DA}}=\sqrt{DA}$; in hoc enim caſu

habeat quanta eſt perpendicularis $E\,F$: deſcendatque mobile per plana illa ab A uſque in D. Dico in D eam velocitatem habiturum quam, ex E cadens, haberet in F.

FIG. 5. Producta enim $C\,B$ occurrat rectæ $A\,E$ in G. Itemque $D\,C$ producta occurrat eidem $A\,E$ in E. Quoniam itaque per $A\,B$ deſcendens eandem acquirit

$L = E$. Si deſcendat per $C\,A$, $T = \frac{C\,A}{\sqrt{E\,A}}$; ſed per 8. prop. 6. Ele.) $E\,A : C\,A :: C\,A : D\,A$; ergo $E\,A \times D\,A = \overline{C\,A}^2$, ergo $D\,A = \frac{\overline{C\,A}^2}{E\,A}$; ergo $\sqrt{D\,A} = \frac{C\,A}{\sqrt{E\,A}}$: tempora igitur deſcenſus per $D\,A$ & $C\,A$ æquantur. Eodem modo demonſtrari poteſt, tempora deſcenſus per omnes chordas $e\,A$, &c. æqualia eſſe tempori deſcenſus per $D\,A$; adeoque æqualia inter ſe.

‡ Velocitas corporis acquiſita cadendo per $C\,A = \sqrt{E\,A}$, (per Theorema IV.); ſed per 8. 6. Ele. $E\,A : C\,A :: C\,A : D\,A$; ergo $E\,A \times D\,A = \overline{C\,A}^2$ igitur $E\,A = \frac{\overline{C\,A}^2}{D\,A}$; ſed dati circuli diameter, data eſt quantitas, ergo $E\,A = \overline{C\,A}^2$; adeoque $\sqrt{E\,A} = C\,A$ adeoque Velocitas acquiſita cadendo per $C\,A$, eſt ut $C\,A$. Eodem modo demonſtratur, quod Velocitates acquiſitæ cadendo per ullas chordas ſunt ut Chordarum Longitudines.

acquirit velocitatem in termino *B*, atque descendens per *G B* (per Cor. 2. IV.); manifestum est, cum flexus ad *B* nihil obstare motui ponatur, tantam velocitatem habiturum ubi in *C* pervenerit, quantam si per *G C* planum descendisset; hoc est, quantam haberet ex descensu per *E C*. Quare & reliquum planum *C D* eodem modo transibit ac si per *E C* advenisset, ac proinde in *D* denique parem velocitatem habebit, ac si descendisset per planum *E D*, hoc est, eandem quam ex casu perpendiculari per *E F*. *Q. E. D.*

Corol. Hinc liquet etiam per Circuli circumferentiam vel per Curvam quamlibet lineam descendente mobili (nam curvas tanquam ex infinitis rectis compositæ essent hic considerare licet) semper eandem illi velocitatem acquiri si ab æquali altitudine descenderit: tantamque eam esse velocitatem, quantam casu perpendiculari ex eadem altitudine adipisceretur.

THEO-

THEOREMA VI.

Si detur planorum quotlibet contiguorum Inclinatio atque ratio Longitudinum eorundem ad invicem; erit Tempus quo totum ſyſtema planorum continuato motu percurritur in ſubduplicata ratione Longitudinis ſyſtematis totius.

MANENTE conſtructione priori, conſtat ex Theoremate II. Tempus deſcenſus per *A B* eſſe in ſubduplicata ratione Longitudinis *A B*. Tempus item deſcenſus tum per *G B* tum per *G C* eſt in eadem ſubduplicata ratione Longitudinis *A B*. Tempus enim deſcenſus per *G B* eſt in ſubduplicata ratione Longitudinis *G B*, adeoque propter datam rationem *G B* ad *A B*, in ſubduplicata ratione Longitudinis *A B*: ſimiliterque Tempus deſcenſus per *G C* eſt etiam in eadem ratione: & diviſim Tempus deſcenſus per *B C* poſt *G B* vel *A B* eſt in eadem ratione. Igitur componendo, Tempus deſcenſus per *A B* & *B C* eſt adhuc in eadem ratione; & ſimiliter Tempus deſcenſus

ſcenſus per quotlibet *A B*, *B C*, *C D* eſt in eadem ratione, hoc eſt, in ſubduplicata ratione Longitudinis *A B* vel Longitudinum $AB + BC + CD$: ſunt enim omnes ad invicem in datis rationibus per Hypotheſin. *Q. E. D.*

Corol. Hinc liquet ſimiles partes Curvarum ſimilium ſimiliterque poſitarum ad Horizontem deſcribi à mobili deſcendente in Temporibus quæ ſunt in ſubduplicata ratione partium deſcriptarum.

Unde ſi Pendula in Circulis oſcillentur, erunt Tempora quibus oſcillationes ſimiles peragunt, in ſubduplicata ratione Longitudinum Filorum.

DE

‡ Sit A vis acceleratrix; tum $V = A \times T$ (per Corol. Problematis præcedentis); ſed (per Lemma præmiſſum) $A = \frac{E}{L}$, et $T = \frac{L}{V}$ (per Theorema III.); adeoque $V = A \times T = \frac{E}{L} \times \frac{L}{V} = \frac{E}{V}$; adeoque $V^2 = E$; adeoque $V = \sqrt{E}$. *Q. E. D.*

§ $T = \frac{L}{V}$ (per Theorema III.): ſed $V = \sqrt{E}$ (per primam partem hujuſce Theorematis); adeoque ſubſtituendo $T = \frac{L}{\sqrt{E}}$. *Q. E.D.*

DE MOTU PENDULORUM IN CYCLOIDE.

DEFINITIO.

FIG. 6. SI Circulus *C D H* qui tangit *A B* rectam in puncto *D*, more rotarum provolvatur super eadem, & circuitum integrum progrediendo conficiat: punctum *C*, quod situm in ejus circumferentia sub initio tangebat rectam *A B* in puncto *A*, motu suo ex rectilineo & circulari composito describet curvam illam lineam *A C E B* quæ Cycloïs

cloïs appellatur. Recta vero *A B* dicitur basis, & huic ad medium ejus punctum *F* perpendicularis *E F*, axis, punctum vero *E* vertex Cycloidis; Circulus autem *C D H* vel huic æqualis in alio situ *G F E* vocatur Circulus genitor.

LEMMA I.

Si circa Cycloidis axem E K F *describatur Circulus genitor* E G F, *& a curvæ puncto quovis* C *ducatur* C I K *parallela basi* A B, *& secans Circulum in* G: *erit arcus Circularis* E G *æqualis rectæ* C G.

PATET ex Definitione totam Circuli circumferentiam æquari rectæ *A B* atque adeo dimidiam circumferentiam *E G F* æquari dimidiæ rectæ *A B*, nempe ipsi *A F*; Patet etiam Circuli æqualis *C D H*, diametro *D I H* descripti, arcum *C D* æquari rectæ *A D*; adeoque arcus *E G* æqualis erit rectæ *D F* vel *I K* vel *C G*. *Q. E. D.*

LEMMA.

LEMMA II.

Iisdem positis, dico chordam EG *parallelam esse rectæ tangenti Cycloidem in puncto* C.

PATET ex generatione Cycloidis, chordam *CD* perpendicularem esse ad Curvam in puncto *C*; itaque chorda *HC* tanget eandem: est autem *EG* chorda parallela chordæ *HC*. *Q. E. D.*

LEMMA III.

Manente Circulo genitore circa axem descripto, si a Curvæ puncto quovis L *ducatur* LMK *parallela basi* BA *quæ abscindat circularem arcum* EM *cujus chorda sit* EM *recta: dico Cycloidis arcum* EL *æqualem esse duplæ chordæ* EM.

DUCATUR enim recta *SQ* parallela & quam proxima rectæ *LK* secans axem in *Q*, circulum in *R*, chordam *EM* productam in *P*, & Cycloidem

Cycloidem in *S*. Junge *E R* & demitte *R O* perpendicularem ad *E M O P*. Tangant denique Circulum in *E* & *M* rectæ *E N*, *M N*. Propter similia triangula *E N M*, *P R M*, & æquales *E N*, *N M*, æquales etiam erunt *P R*, *R M*. Itaque lineola *M P* sive *L S* dupla erit lineolæ *M O*. Sunt autem *L S* & *M O* incrementa momentanea synchrona arcus Cycloidis *E L* & chordæ *E M*: crevit itaque arcus *E L* duplo semper velocius quam chorda *E M*. Is ergo hujus duplus est. *Q. E. D.*

PROBLEMA.

Facere ut Corpus pendulum oscilletur in Cycloide data.

DETUR Cyclois *AVB* super basi *AB* descripta; producatur axis ejus *VD* ad *C* ut æquales evadant *D C*, *D V*; per *C* age *E C F* parallelam basi *A B*; cape *C E*, *C F* æqualem utramque dimidiæ basi; describantur à puncto *C* super *C E*, *C F* duæ semicycloides *C A*, *C B* æquales dimidiæ datæ Cycloidi, quarum vertices tangant basim *A B* in punctis *A*, *B*. A puncto illo *C* filo *C T P*, longitudinem FIG. 7.

F

gitudinem *CV* æquante, pendeat corpus *P* & ita intra ſemicycloides oſcilletur, ut quoties pendulum digreditur à perpendiculo *CV* filum, parte ſui ſuperiore *CT*, applicetur ad ſemicycloidem illam *CTA* verſus quam peragitur motus & circum eam ceu obſtaculum flectatur, parteque reliqua *TP* cui ſemicyclois nondum objicitur, protendatur in lineam rectam; & pondus *P* oſcillabitur in Cycloide data *AVB*. *Q.E.F.*

Deſcribantur enim ſemicirculi genitores *AGE*, *DHV* ſuper axibus *AE*, *DV*. Age *TG*, *PH* parallelas baſi *AB*, & junge *AG*, *DH*.

Semicyclois *AC* æqualis eſt duplæ rectæ *AE*, per Lem. III. atque adeo æqualis rectæ *CV* vel filo integro *CTP*: itaque arcus Cycloidis *TA* æqualis erit parti liberæ fili *TP* quæ Cycloidem in *T* tangit. Unde cum *GA* parallela ſit tangenti *TK* (per Lem. II.) eique adeo æqualis, & dupla *GA* vel dupla *TK* æqualis ſit arcui [illegible] vel rectæ TA
TP, per Lem. III. erunt æquales *TK* & *KP*, & parallelæ *TG*, *PH* æquali intervallo diſtabunt a baſi *AB*. Abſcindunt ergo ſemicirculorum generantium

rantium æquales arcus *G A* & *H D;* unde parallelæ ſunt chordæ *A G*, *D H*, ac proinde *K P*, *D H;* & quadrilaterum *D H P K* eſt parallelogrammum & æquales ſunt *D K* & *H P*. Itaque cum *A K* recta ſit æqualis *G T* rectæ vel (per Lem. I.) arcui *A G* vel arcui *DH;* erit *H P* vel *D K* æqualis arcui reliquo *V H*, adeoque pondus *P* erit in Cycloide data *A V B*, per Lemma I. *Q. E. D.*

THEOREMA I.

Si Axis Cycloidis D V *conſtituatur ad horizontem perpendicularis, vertice* V *deorſum ſpectante, & mobile incipiat a puncto quovis Cycloidis* L *oſcillari verſus verticem* V: *erit velocitas ejus in loco quovis* M *ut* $\sqrt{VLq - VMq}$; *vel ſi in rectam protendatur curva* V N M L *fiatque radius Circuli* L Z P, *erit velocitas in loco* M *ut ſinus* M X *qui huic radio ad* M *punctum perpendiculariter inſiſtit.*

AD Axem *D R S V* demittantur perpendiculares *L R*, *M S* ſemicirculo genitori *D O Q V* occurrentes in *O*, *Q*, & jungantur *O V*, *Q V*.

Oſcillantis

Oscillantis Velocitas in loco M æqualis est velocitati corporis cujusvis cadentis ab R ad S, per Theor. V. de Desc. Grav. Est autem hæc velocitas (per Theor. II. de Desc. Grav.) in subduplicata ratione Longitudinis RS vel $RV - SV$ vel quantitatis $RV \times VD - SV \times VD$ vel $VOq - VQq$ vel $VLq - VMq$, per Lem. III. vel in ratione integra sinus MX, per Constructionem. *Q. E. D.*

THEOREMA II.

Iisdem positis, dico Circuli arcum quemlibet XxY *sinubus* MX, NY *interjectum, eodem tempore describi cum velocitate maxima* VZ *ad verticem Cycloidis acquisita, quo a Pendulo dimisso ab* L *percurritur arcus* MN *respondens rectæ* MmN, *quæ interjicitur iisdem sinubus. Eritque adeo tempus quo percurritur arcus ille* MN *ut Circuli arcus* XY.

NAM ductus intelligatur sinus mrx sinui MX vicinissimus & parallela sit lineola Xr lineolæ Mm.

Constat

Conſtat ex Theoremate præcedente lineolam *M m* deſcribi cum velocitate quæ eſt ut *M X* & lineolam *X x* cum velocitate quæ eſt ut *V Z*. Sed propter ſimilia triangula *M X V*, *r X x*, eſt *X x* ad *X r* vel *M m*, ut *V X* vel *V Z* ad *M X*. Sunt igitur *X x* & *M m* ad invicem ut velocitates quibuſcum deſcribuntur. Æquali itaque tempore deſcribuntur; ac pari ratione cæteræ partes correſpondentes. Unde totus arcus Cycloidalis *M N* & Circularis *X Y* æquali tempore deſcribuntur. Eſt autem tempus quo deſcribitur *M N*, vel quo deſcribitur *X Y* cum data velocitate *V Z* ut ipſe arcus *X Y*. *Q. E. D.*

THEOREMA III.

Tempus quo peragitur Oſcillatio quævis in data Cycloide, eſt ad tempus deſcenſus Gravis per axem Cycloidis, ut Circuli peripheria ad ejuſdem diametrum; atque adeo Oſcillationes omnes ſunt Iſochronæ.

TEMPUS quo deſcribitur ſemiperipheria *L Z P* cum velocitate maxima *V Z* eſt ad tempus

quo deſcribitur ſemidiameter *L V* cum eadem velocitate *V Z* ut Circuli peripheria ad ejuſdem diametrum. Eſt autem tempus prius idem atque tempus oſcillationis integræ *L V P*, per Theorema II. Tempus vero poſterius idem eſt atque tempus deſcenſus Gravis per Cycloidis axem *D V*: nam quo tempore ſemidiameter *L V* vel arcus *L V* vel dupla chorda *O V* percurritur cum velocitate maxima acquiſita ad verticem *V* ſive a pendulo oſcillante per arcum *L V*, ſive a Gravi decidente per chordam *O V*; eodem cadit Grave ab *O* ad *V* (per Th. I. de Deſc. Grav.) vel a *D* ad *V*, per Cor. 3. Theor. IV. de Deſc. Gravium. Itaque tempus oſcillationis eſt ad tempus deſcenſus Gravis per axem Cycloidis ut Circuli peripheria ad ejuſdem diametrum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Si corpora duo filis æqualibus ſuſpenſa, temporibus æqualibus oſcillationes ſuas peragant; in deſcenſu rectilineo æquabiliter accelerabuntur: & propterea Pondera eorum erunt ut Quantitates Materiæ.

Corol.

Corol. 2. Spatium quod a gravi e quiete dimisso, tempore quovis percurritur, est ad semissem longitudinis fili, quo idem grave suspensum eodem tempore oscillationes singulas peragit; in duplicata ratione circuli peripheriæ ad diametrum. Cadat enim grave per fili longitudinem dimidiatam; & tempus descensus erit ad tempus unius oscillationis, ut circuli diameter ad peripheriam: augeatur jam tempus in hac ratione ut æquale fiat tempori oscillationis; & spatium descriptum augebitur in duplicata illa ratione.

THEOREMA IV.

Tempus quo peragitur Oscillatio quævis in Cycloide, ubi tum fili longitudo tum vis gravitatis variatur, est in subduplicata ratione longitudinis istius directe & vis gravitatis inverse.

TEMPUS Oscillationis est ut tempus descensus per Axem per Theor. III. atque hoc tempus est in subduplicata ratione axis vel dupli axis vel fili

fili longitudinis directe, & in subduplicata ratione vis gravitatis inverse. Nam si detur vis, longitudo descensus erit ut quadratum temporis; & si detur tempus, longitudo erit ut velocitas ac proinde ut vis: adeoque neutro dato, ut quadratum temporis & ut vis conjunctim. Unde tempus erit in subduplicata ratione longitudinis directe & vis inverse. *Q. E. D.*

Corol. Longitudo fili, quæ per hanc demonstrationem erat ut vis gravitatis & quadratum temporis simul; dato tempore erit ut vis illa simpliciter.

SCHOLIUM.

Patet vires acceleratrices esse ut velocitatum mutationes dato tempore quam minimo genitas. Erit itaque vis acceleratrix in loco *M* ut lineola *r x*, dato arcu minimo *X x*, hoc est ut longitudo *V M*. Et vicissim, si vis acceleratrix sit ut *V M* & motus continuetur ab *L* versus *V*; erit velocitas in loco quovis *M*, ut sinus *M X*, tempusque transeundi ab *M* ad *N* erit ut arcus *X Y*.

Quæcunque

Quæcunque in præcedentibus de oſcillationibus in Cycloide dicta ſunt, etiam de oſcillationibus minimis in Circulo pariter obtinebunt: nam iſtiuſmodi oſcillationes utrobique eædem erunt. Quin & hoc fortaſſe non eſt prætereundum; nempe corporis funipenduli in dato circulo utcunque oſcillantis velocitatem ad punctum infimum eſſe ut chorda arcus toto deſcenſu deſcripti. Nam per Corol. Theor. V. de Deſc. Grav. velocitas illa eadem erit ſive per arcum ſive per chordam deſcenderetur, & proinde erit ut chorda per Corol. 3. Theor. IV. de Deſc. Grav.

DE MOTU PROJECTILIUM.

THEOREMA.

Curva descripta motu corporis oblique projecti est Parabola: & Velocitas Projectilis in quolibet puncto parabolæ ea est quam grave cadendo acquirere potest & casu suo describendo quartam Parametri partem pertinentis ad punctum illud datum pro Vertice sumptum.

FIG. 8. EXEAT Projectile de loco *A* secundum rectam *AE*, & sit *ACD* curva descripta. Ponatur *AE* longitudo quam dato quovis tempore Projectile transiret motu æquabili orto ex vi impressa si nulla esset gravitas: atque *AB* alia longitudo

tudo quam grave eodem tempore transiret descendendo ab A versus centrum Telluris. Completo parallelogrammo $EABC$, facile patebit projectile motu composito latum in fine ejusdem temporis perventurum esse ad punctum C. Est autem AE ut tempus quo describeretur; adeoque AEq vel BCq ut temporis quadratum. Est etiam AB ut quadratum ejusdem temporis per Theor. II. de Desc. Grav. Igitur AEq vel BCq est ut AB. Proinde curvæ descriptæ puncta C sita sunt in Parabola cujus Diameter est AB, Vertex A & Parameter ad hunc verticem pertinens est $\frac{BCq}{AB}$ vel $\frac{AEq}{EC}$.

Projectilis in puncto quovis A ea est Velocitas qua longitudo AE eodem tempore describi posset quo grave descenderet ab E ad C. Velocitas autem hoc descensu acquisita, est ad velocitatem illam qua longitudo AE eodem tempore describi posset, ut EC ad $\frac{1}{2}AE$ per Theor. I. de Desc. Gravium. Eademque velocitas acquisita in C cadendo ab E, est ad velocitatem acquirendam cadendo per quartam

tam partem Parametri nempe $\frac{\frac{1}{4} A E q}{E C}$, in ſubduplicata ratione longitudinis $E C$ ad longitudinem $\frac{\frac{1}{4} A E q}{E C}$ (per Theor. II. de Deſc. Grav.) vel in ratione integra ipſius $E C$ ad $\frac{1}{4} A E$. Itaque Projectilis velocitas in puncto A ea eſt quam grave acquirere poteſt deſcendendo per quartam Parametri partem pertinentis ad Verticem A. *Q. E. D.*

Corol. 1. Si projectile dirigatur ſecundum $A E$ & parabolæ deſcribendæ parameter pertinens ad Verticem A ſit æqualis quantitati $\frac{A E q}{E C}$; iſthæc parabola tranſibit per punctum C.

Corol. 2. In eadem vel in diverſis parabolis Parametri pertinentes ad quoſlibet Vertices ſunt ad invicem in duplicata ratione Velocitatum quibus feruntur Projectilia in iſtis verticibus, per Theor. II. de Deſc. Grav.

Corol.

Corol. 3. Itaque in quibusvis Parabolis ubicunque locorum æquales fuerint impetus seu motus ejusdem Projectilis vel æquales velocitates diversorum Projectilium, ibi semper æquales erunt Parametri; & vice versa: utcunque diversa fuerit directio motus in istis locis.

PROBLEMA.

Data Velocitate qua de loco dato Projectile dirigendum est dataque positione Scopi feriendi: invenire Directiones vis imprimendæ.

DATA Velocitate dabitur Parameter Parabolæ describendæ. Constat enim per Theorema, si grave eousque descendat dum data illa velocitas cadendo fuerit acquisita: Altitudinem isto descensu percursam fore æqualem quartæ parti parametri.

Esto jam *C* scopus, positus in data recta *A C*. In loco *A*, de quo projectile dirigendum est, erige

A P normalem ad Horizontem & æqualem Parametro inventæ. Dividat hanc perpendiculariter & bifariam in *G* recta *K H*, cui in *K* occurrat recta *A K* ad ipsam *A C* perpendicularis, centroque *K* & intervallo *K A* describatur circulus *A H P*. Denique per scopum *C* ad horizontalem *A B* normalis ducatur *B C E I* circulum secans (si fieri potest) in *E* & *I*: erunt *A E* & *A I* directiones quæsitæ. *Q. E. I.*

FIG. 9. Nam, si jungantur *P E*, *P I*, propter similia triangula *P A E*, *A E C* erit *P A* æqualis $\frac{AEq}{EC}$. Itemque propter similia triangula *P A I*, *A I C* erit eadem *P A* æqualis $\frac{AIq}{IC}$. Igitur, cum sit *P A* parabolæ describendæ parameter pertinens ad punctum *A*, constat per Cor. 1. Theorematis, parabolam istam transituram esse per scopum *C*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Patet rectam *A H* bisecare Angulum *C A P* mensuram visibilis distantiæ inter Scopum & Zenith.

Corol.

Corol. 2. Ubi puncta *E I* concurrunt in *H*, ſive directiones binæ *A E*, *A I*, concurrunt in unam *A H*, Scopi diſtantia *A C* evadet maxima *A x* quæ velocitate illa data tranſiri poteſt.

Corol. 3. Binæ quælibet directiones *A E*, *A I*, quarum utravis idem Scopus feriri poteſt, æqualiter diſtant à directione illa *A H*, hoc eſt, anguli *E A H*, *I A H* ſunt æquales.

Corol. 4. Scopi diſtantia *A C* vel *A B* poſita in linea Horizontali, eſt ut ſinus dupli anguli Elevationis *E A C* vel *I A C*. Nam ſi recta *C E I* occurrat rectæ *G H* in *F*, erit *A C* vel *G F* æqualis ſinui arcus *A E* vel *A I*, qui metitur duplum angulum *E A C* vel *I A C*.

Corol. 5. Maxima autem Scopi diſtantia *A x* poſita in linea Horizontali adæquat *A G* ſemiſſem Parametri, adeoque datur: Et Scopus iſte *x* attingi poteſt exiſtente angulo Elevationis *H A x* ſemirecto.

Corol.

FIG. 10. *Corol.* 6. Si Projectile emittatur secundum *AE*, puncti altissimi parabolæ describendæ Altitudo supra Horizontem adæquabit $\frac{1}{4}$ *EC*. Nam si *AC* bisecetur in *T* & ducatur *TR* parallela ad *CE* secansque *AE* in *R*: erit *AC* ordinata ad parabolæ axem *TR* quem vertex ejus principalis bifariam dividet in *V*. Itaque Altitudo *TV* est æqualis $\frac{1}{2}$ *TR* vel $\frac{1}{4}$ *CE*. Cum vero *CE* sit sinus versus arcus *AE*, sive dupli anguli *CAE*, patet projectilis Altitudinem *TV* esse ut Sinus versus dupli anguli Elevationis.

Corol. 7. Altitudo autem maxima projectilis emissi secundum *AP* normalem ad Horizontem adæquabit $\frac{1}{4}$ parametri *AP*; adeoque datur. Nam in hoc casu coincidentibus *AE*, *EC* cum directione *AP*, altitudo illa *TV* vel $\frac{1}{4}$ *CE* jam evadet $\frac{1}{4}$ *AP*.

Corol. 8. Tempus quo projectile emissum secundum *AE* feretur ab *A* ad *C* est ut Chorda *AE* vel ut $\frac{1}{2}$ *AE*, hoc est, ut sinus anguli elevationis *EAC*.

Corol.

Corol. 9. Tempus autem maximum projectili emiſſo ſecundum *A P*, normalem ad Horizontem, idem eſt quo grave deſcendet à *P* ad *A* per totam parametrum, adeoque datur. Nam in hoc caſu Projectile recta aſcendit ad altitudinem $\frac{1}{4}$ *A P*, deinde vero ab eadem altitudine deſcendit. Tempora vero aſcenſus & deſcenſus ſimul ſumpta conficiunt duplum tempus ſolius deſcenſus vel tempus deſcenſus ab altitudine quadrupla, per Theor. II. de Deſcenſu Gravium.

F I N I S.

In the Press,

And speedily will be published by Subscription,

Dr. MORGAN's

SIX DISSERTATIONS,

Published by Dr. CLARKE,

IN HIS

NOTES upon ROHAULT's PHYSICS.

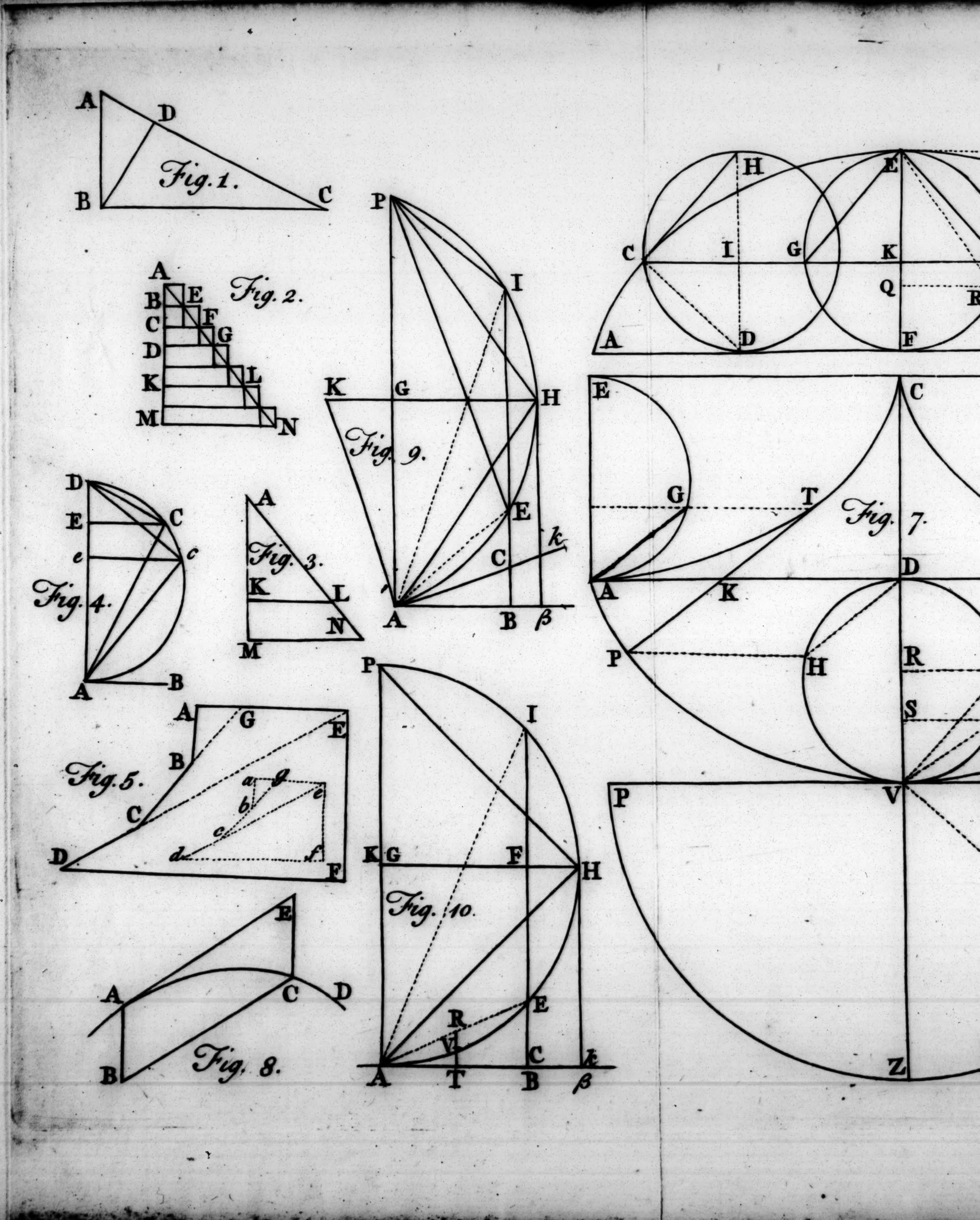
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.

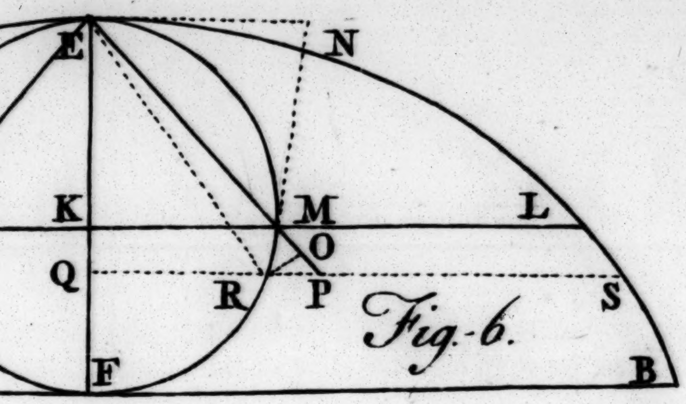

Fig. 6.

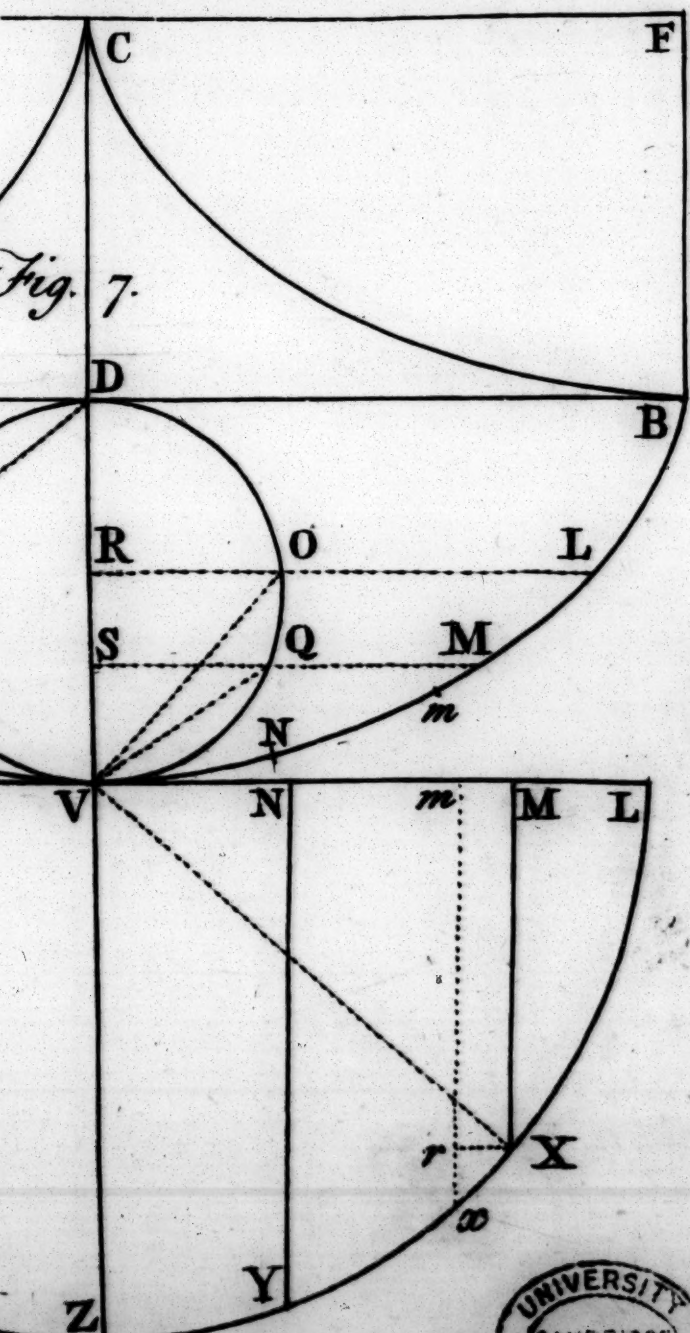

Fig. 7.